www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATIÈRES À OPTION

(Option générale)

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Ce problème nécessite, pour l'application numérique, l'usage de table de la loi normale

RAPPEL :

$$\forall\, \theta > 0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}}\, dy = 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\theta^2}}\, dy = \theta\sqrt{2\pi}\,.$$

Le symbole ln désigne le logarithme népérien.

1

Dans cette partie, X est une variable aléatoire à valeurs réelles positives, ayant une densité f_X définie sur $[0, +\infty[$ et une espérance notée EX.

On définit pour $x \geqslant 0$: $F_X(x) = P(X \leqslant x)$

$$Q_X(x) = \frac{1}{EX}\int_0^x t f_X(t)\, dt\,.$$

1.1. Soit $\lambda > 0$ et supposons X de loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire que pour $x \geqslant 0$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,.$$

a. Déterminer F_X et Q_X. Donner le tableau de variation de Q_X.

b. Montrer l'existence d'une application C_X de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, telle que $Q_X = C_X \circ F_X$.

c. Exprimer $C_X(p)$, construire la courbe représentative de la fonction C_X.

d. On désigne par C'_X la dérivée de la fonction C_X. Montrer qu'il existe un unique p_0 tel que $C'_X(p_0) = 1$. Déterminer x_0 tel que $p_0 = F_X(x_0)$.

e. Soit I(X) l'aire comprise entre le segment joignant le point de coordonnées (0, 0), le point de coordonnées (1, 1) et la courbe construite en *c.* Calculer I(X).

1.2. Soit $a > 0$ et supposons X de loi uniforme sur $[0, a]$ c'est-à-dire que pour $x \geqslant 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{a} \quad \text{si} \quad x \in [0, a]$$

$$f_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in]a, +\infty[$$

Résoudre les mêmes questions *a.*, *b.*, *c.*, *d.* et *e.* qu'au paragraphe 1.1.

1.3. On suppose maintenant que X a une densité f_X strictement positive sur $]0, +\infty[$.

a. Résoudre les mêmes questions *b.* et *d.* qu'au paragraphe 1.1.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 C_X(p)\, dp = \int_0^{\infty} Q_X(x) f_X(x)\, dx$.

Tournez la page S.V.P.

2

2.1. Soit φ la densité de la loi normale d'espérance 0 et de variance 1 et Φ la fonction de répartition correspondante c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \qquad \text{pour} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soit Y une variable aléatoire de loi normale d'espérance m et de variance σ^2.

a. Déterminer pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\Psi(y) = P(Y \leqslant y)$$

en fonction de Φ, m, σ, y.

b. Soit X définie par $X = e^Y$. Déterminer pour $x > 0$, $F_X(x)$ et $f_X(x)$ en fonction de Φ, φ, m, σ, x.

2.2. Dans toute la suite du problème, on utilisera la définition suivante : si $\mu \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on dit qu'une variable aléatoire réelle positive X suit la loi LN (μ, θ) si sa fonction de répartition peut s'écrire :

$$\forall\, x > 0 \qquad F_X(x) = \Phi\left(\frac{1}{\theta}((\ln x) - \mu)\right)$$

$$F_X(0) = 0.$$

a. Si X est de loi LN (μ, θ), et si on pose $Y = \ln X$, déterminer F_Y.

b. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, X_1 de loi LN (μ_1, θ_1), X_2 de loi LN (μ_2, θ_2), déterminer la loi du produit $X_1 X_2$.

c. Si Z est une variable aléatoire de loi LN (μ, θ), montrer que pour $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la variable aléatoire cZ^α est de loi LN (μ', θ') où on précisera les valeurs de μ' et θ'.

2.3. Soit $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. On définit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi définie par :

$$P(X_i = e) = p \qquad P(X_i = 1) = q = 1 - p.$$

a. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} (\ln X_i)$?

b. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction de répartition de :

$$T_n = e^{-p\sqrt{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

converge en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ vers une limite que l'on déterminera.

2.4. Si X est de loi LN (μ, θ), calculer pour $x > 0$: $\int_0^x t f_X(t)\,dt$.

(On pourra poser $t = e^{\theta s + \mu + \theta^2}$.) En déduire Q_X.

Application numérique :

a. Soit K un réel strictement positif fixé. Soit D une variable aléatoire de loi LN $(-0{,}5\,;\,0{,}3)$. On pose $U = KD^3$. On donne $d_0 = 0{,}5$, $u_0 = Kd_0^3$;

Calculer $Q_U(u_0)$.

b. Interprétation :

On considère un tas de sable à grains sphériques. On suppose que le diamètre d'un grain pris au hasard suit une loi LN (− 0,5 mm ; 0,3 mm), on passe le sable au tamis, les trous du tamis étant circulaires de diamètre 0,5 mm. Quelle proportion du poids total de sable passe au travers du tamis ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail